$$\frac{1}{\rho}\int_0^0 dp = -\,g\,\text{sen}\,15^\circ\,\cos 15^\circ \int_0^{x_1} dx - g\,\cos^2 15^\circ \int_0^{z_1} dz$$

NOTA : Aquí se ha integrado entre A y O, puntos de la superficie donde la presión relativa es nula.

Luego queda : $0 = -\,g\,\text{sen}\,15^\circ\,x_1 + g\,\cos^2 15^\circ\,z_1$

De donde :

$$\frac{z_1}{x_1} = \frac{\text{sen}\,15^\circ\,\cos 15^\circ}{\cos^2 15^\circ} = \frac{\text{sen}\,15^\circ}{\cos 15^\circ} = \text{tg}\,15^\circ$$

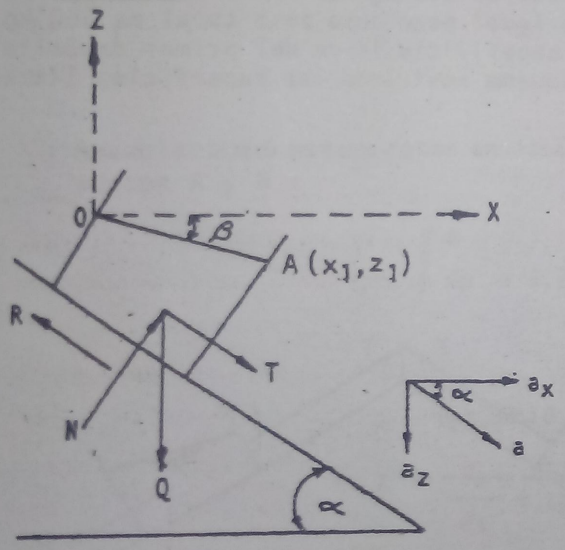
Pero como :

$$\frac{z_1}{x_1} = \text{tg}\,\beta$$

Luego : $\text{tg}\beta = \text{tg}\,15^\circ \quad \therefore$ [redacted]

22.- Un depósito resbala sobre un plano inclinado α con la horizontal por la acción de su propio peso. ¿Cuál será el ángulo que haría la superficie libre del líquido (como término medio de las oscilaciones que se producen) con la horizontal si el coeficiente de fricción entre el fondo del depósito y el plano inclinado es $f = \text{tg}\,\phi$?

SOLUCION



Sea Q el peso, sus componentes a lo largo de la superficie inclinada :

$$T = Q\,\text{sen}\alpha$$

$$N = Q\,\cos\alpha \quad \text{(Normal)}$$

La fuerza de rozamiento será :

$$R = N.f = Q\,\cos\alpha\,.\,\text{tg}\,\phi$$

La fuerza que produce el movimiento

$$F = T - R$$

$$F = Q\,(\text{sen}\alpha - \cos\alpha\,.\,\text{tg}\,\phi)$$

Como $F = m.a$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Q(\text{sen}\alpha - \cos\alpha\,.\,\text{tg}\,\phi)}{\frac{Q}{g}}$$

$$a = g(\text{sen}\alpha - \cos\alpha\,.\,\text{tg}\,\phi)$$

Cálculo de las componentes de "a" : (considerando D'Alembert)

$a_x = -a\cos\alpha = -g\cos\alpha\ (\operatorname{sen}\alpha\ \cos.\operatorname{tg}\phi)$ ..... (1)

$a_y = 0$ ..... (2)

$a_z = a\operatorname{sen}\alpha - g = g\operatorname{sen}\alpha\ [\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha\ .\operatorname{tg}\phi] - g$ ..... (3)

Reemplazando (1), (2) y (3) en la fórmula de Euler :

$$\frac{1}{\rho}\int_0^0 dp = -g\cos\alpha\,[\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha\,.\operatorname{tg}\phi]\int_0^{x_1} dx + g\operatorname{sen}\alpha[\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha\,.\operatorname{tg}\phi] - 1\int_0^{-z_1} dz$$

$$0 = -g\cos\alpha\,[\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha\,.\operatorname{tg}\phi]\,x_1 - (g\operatorname{sen}\alpha\,[\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha\,.\operatorname{tg}\phi] - 1)\,z_1$$

De donde :

$$\frac{z_1}{x_1} = \frac{\cos\alpha\,[\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha\,.\operatorname{tg}\phi]}{-\operatorname{sen}\alpha\,[\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha\,.\operatorname{tg}\phi] + 1} = \operatorname{tg}\beta$$

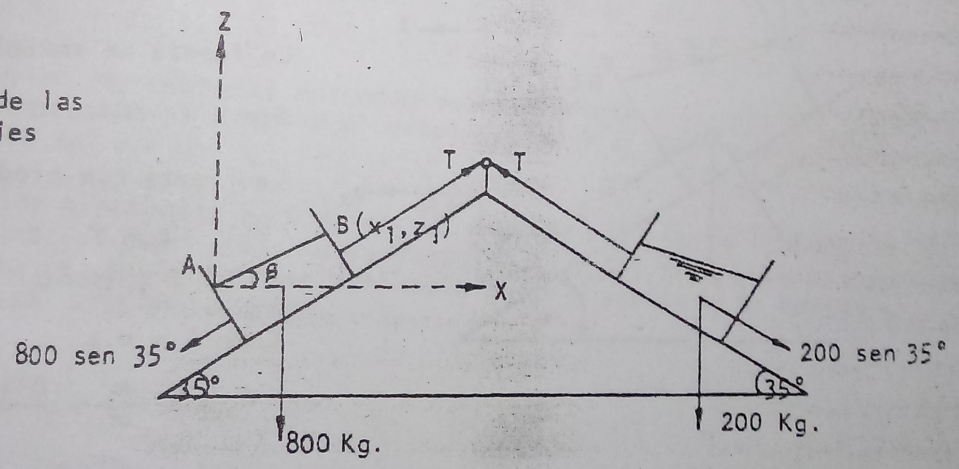
Luego :

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\ \frac{\cos\alpha.\ \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha\,.\operatorname{tg}\phi}{1 - \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha\,.\operatorname{tg}\phi}$$

23.- Sobre un plano inclinado 15° con la horizontal se desliza un depósito conteniendo agua y cuyo peso total es 800 kg. El descenso de dicho depósito produce el ascenso de otro igual pero cuyo peso total es 200 kg. Calcular el ángulo que hace la superificie libre del primer depósito con la horizontal. Dibuje un esquema mostrando las superficies libres de ambos depósitos.

SOLUCION :

Esquema de las superficies libres.



Como : $F = m\,.\,a$, se tiene que :

Las fuerzas proyectadas sobre la superficie del primer depósito de la e-

cuación :

$$800 \text{ sen } 35° - T = \frac{800}{9.8}\, a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

La del segundo depósito :

$$T = 200 \text{ sen } 35° = \frac{200}{9.8}\, a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

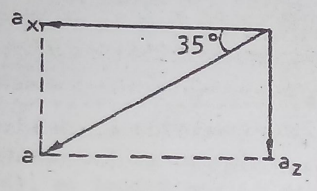
Sumando (1) con (2) :

$$(800 - 200) \text{ sen } 35° = \frac{a}{9.8}\,(800 + 200)$$

De donde :

$$600 \text{ sen } 35° = \frac{1000\, a}{9.8}$$

$$a = \frac{600 \text{ sen } 35° \times 9.8}{1{,}000} = \frac{600 \times 0.573576 \times 9.8}{1{,}000} = 3.37 \text{ m/seg}^2$$



Según Euler :

$$\frac{1}{\rho}\, dp = a_x \cdot dx + a_y \cdot d_y + a_z \cdot dz$$

Para lo cual debemos proyectar la aceleración sobre los ejes X, Y, Z :

$$a_x = a \cos 35° = 2.76 \text{ m/seg}^2$$

$$a_y = 0$$

$$a_z = a \text{ sen } 35° - g = -7.88 \text{ m/seg}^2$$

Reemplazando estos datos en la Ecuación de Euler e integrando entre los puntos A y B :

$$\frac{1}{\rho} \int_0^0 dp = 2.76 \int_0^{x_1} dx - 7.88 \int_0^{z_1} dz$$

$$0 = 2.76\, x_1 - 7.88\, z_1$$

$$\frac{z_1}{x_1} = \text{tg}\beta = \frac{2.76}{7.88} = 0.3502$$

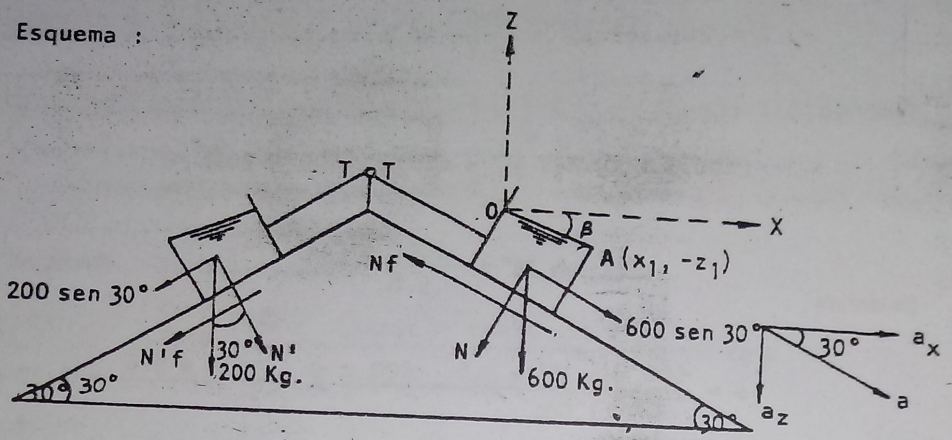
$$\therefore \quad \boxed{\beta = 19° 18'}$$

24.- Determinar el ángulo que forma la superficie del líquido contenido en un tanque con la horizontal, si el tanque desciende por razón de su propio peso, por un plano inclinado a 30° con la horizontal. El descenso del tan

que, que pesa 600 kgs. produce el ascenso de otro menor, cuyo peso es 200 kgs. El coeficiente de fricción entre el fondo de ambos tanques y la superficie del plano inclinado es : f = 0.25. Dibuje un esquema mostrando las superficies libres de ambos tanques.

SOLUCION

Esquema :



Como F = m.a, tengo para el tanque de 600 kgs.

$$600 \text{ sen } 30° - T - NF = \frac{600}{g} a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Para el tanque de 200 kgs.

$$T - 200 \text{ sen } 30° - NF = \frac{200}{g} a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Sumando (1) con (2) :

$$-(N + N')f + (600 - 200) \text{ sen } 30° = \frac{(600 + 200)}{g} a$$

$$-(N + N')f + 400 \times 0.5 = \frac{800}{g} a$$

Despejo $a = \frac{-(N+N')f + 400x0.5}{800} g = \frac{400x0.5 - (600+200) \cos 30° \times 0.25}{800} g$

$$a = \frac{400x0.5 - (800)\ 0.866 \times 0.25}{800} g = 0.0335\ g$$

Que de acuerdo con el teorema de D'Alambert, debe ser considerada con signo contrario; las proyecciones de la aceleración eobre los ejes X,Y,Z son :

$$a_x = -0.0335\ g \cos 30° = -0.029\ g$$

$$a_y = 0$$

$$a_z = 0.0335\ g.\text{sen } 30° - g = -0.98325\ g$$

Reemplazando estas aceleraciones en la ecuación de Euler, e integrando:

$$\frac{1}{\rho}\int_0^0 dp = -0.029\,g\int_0^{x_1} dx - 0.98325\,g\int_0^{z_1} dz$$

$$0 = -0.029\,g\,x_1 + 0.8325\,g.\,s_1$$

De donde :

$$\frac{z_1}{x_1} = tg\beta = \frac{0.029}{0.98325} = 0.0295$$

$$\boxed{\beta = 1^\circ\ 41'}$$

25.- Un tanque de sección transversal rectangular (6 x 1 m.) está lleno de agua hasta los 4 m. de altura y está unido a un peso Q = 60,000 kgs. por medio de una cuerda flexible e inextensible que pasa por una polea. El coeficiente de rozamiento entre el tanque y la superficie horizontal es: f = 0.6 y todos los demás rozamientos son despreciables. Hallar la presión en un punto del tanque situado 1 m. sobre el punto A de la figura. Despreciar el peso propio del tanque.

SOLUCION

Como F = m.a
y, llamando T la tensión de la cuerda, se tendrá por el diagrama del cuerpo libre que corresponde al peso Q :

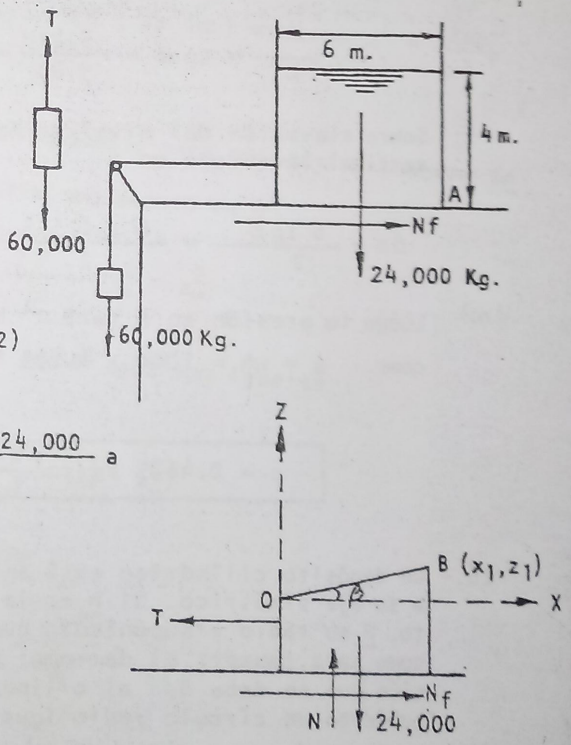
$$60{,}000 - T = \frac{60{,}000}{9.8}\,a \quad \ldots (1)$$

En el diagrama del Tanque

$$T = 24{,}000 \times 0.6 = (24{,}000/9.8)\,a \quad \ldots (2)$$

Sumando (1) con (2).

$$60{,}000 - 24{,}000 \times 0.6 = \frac{60{,}000 + 24{,}000}{9.8}\,a$$



$$45,600 = \frac{84,000}{9.8}\, a$$

Despejando :

$$a = \frac{45,600 \times 9.8}{84000} = 5.32 \text{ m/seg}^2$$

Por Euler se tiene :

$$\frac{1}{\rho} dp = a_x.dx + a_y.dy + a_z.dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Donde :

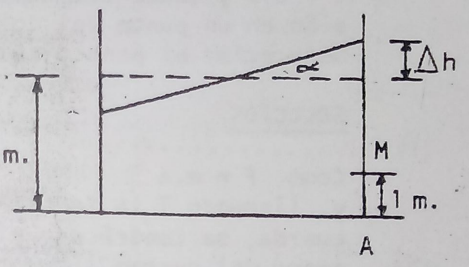
$a_x = 5.32$ m/seg^2
$a_y = 0$
$a_z = -g$

Reemplazando en (1) e integrando para los puntos B - o

$$\frac{1}{\rho} \int_0^0 dp = 5.32 \int_0^{x_1} dx - g \int_0^{z_1} dz$$

$$0 = 5.32\, x_1 - g\, z_1$$

$$\frac{z_1}{x_1} = \text{tg}\,\beta = \frac{5.32}{9.80} = 0.545$$



Sobre elevación del nivel de agua en la vertical levantada en A

$$\Delta h = \frac{6\, \text{tg}\,\beta}{2} = \frac{6 \times 0.545}{2} = 1.635 \text{ m.}$$

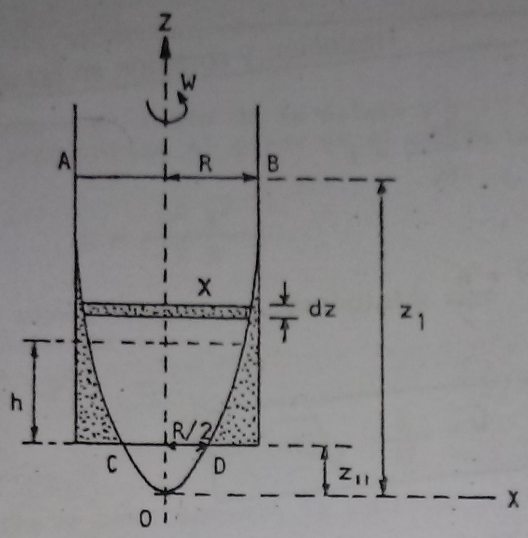
Luego la presión en M será : h = 4 1.635 - 1 = 4.615 m. de agua

como : $p = wh = 1000 \times 4.635 = 4,635$ kg/m^2

$$p = 0.4635 \text{ kg/cm}^2$$

26.- Un depósito cilíndrico está animado con un elemento rotativo respecto a su eje simétrico. Si h es la altura de agua que contiene el depósito, R su radio y suponiendo que sus paredes son suficientemente altas como para impedir el derrame; se pide calcular la velocidad de rotación que se debe dar al cilindro de manera que en el fondo quede descubierto un círculo radio igual a R/2.

SOLUCION



Se sabe que la altura que alcanza un líquido debido al movimiento rotativo está dado por :

$$z_1 = \frac{w^2 x^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Para el paraboloide COD :

$$z_{11} = \frac{w^2 (R/2)^2}{2g} = \frac{w^2 R^2}{8g} \quad \ldots\ldots (2)$$

Para el paraboloide AOB :

$$z_1 = w^2 R^2 / 2g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Ahora hallaremos una ecuación que relaciones z_1 y z_{11} , para ello igualamos los volúmenes no ocupados por el agua.

Volumen no ocupado por el agua durante el reposo = $(z_1 - z_{11} - h)\pi R^2$ ....

Volumen no ocupado por el agua durante el movimiento, la calculamos teniendo elementos diferenciales. Tomemos una faja de ancho dz y distancia del eje a la pared x.

$$dV = \pi x^2 . dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$; de (α) sacamos $x^2 = \frac{2zg}{w^2}$

que reemplazándolo en (3) :

$$dV = \frac{2\pi g}{w^2} z . dz$$. que integrándolo para obtener el volumen total no ocupado por el agua durante el movimiento da :

$$V = \frac{2\pi g}{w^2} \int_{z_{11}}^{z_1} z . dz = \frac{2\pi g}{w^2} (z_1^2 - z_{11}^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

(β) y (γ), volúmenes no ocupados por el agua son iguales :

Entonces :

$$\pi R^2 (z_1 - z_{11} - h) = \frac{2\pi}{w^2} (z_1^2 - z_{11}^2)$$

Reemplazando (1) y (2) en esta última :

$$\pi R^2 \left(\frac{w^2 R^2}{2g} - \frac{w^2 R^2}{8g} - h\right) = \frac{g\pi}{w^2} \left(\frac{w^4 R^4}{4g^2} - \frac{w^4 R^4}{64 g^2}\right)$$

Simplificando :

$$\frac{W^2R^2}{g}\left(\frac{3}{8}-\frac{15}{64}\right)=h$$

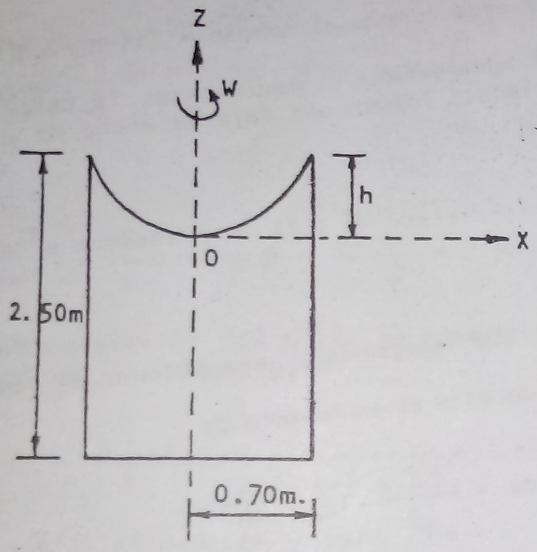
$$\frac{W^2R^2}{g}\left(\frac{9}{64}\right)=h$$

De donde :

$$\boxed{W=\frac{8}{3R}\sqrt{gh}}$$

27.- Un vaso cilíndrico de 2.50 m. es llenado con agua hasta los dos metros. El diámetro del vaso es 1.40 m. Hallar la velocidad angular y las revoluciones por minuto que harán elevar el agua hasta los bordes del vaso.

SOLUCION



Como el agua no se ha perdido :
Vol. paraboloide = Vol. de la parte del cilindro sin agua (reposo).

$$\frac{\pi r^2 h}{2}=\pi r^2(2.50-2.00)$$

Despejando : h = 1 m.

Como es un movimiento rotativo se tiene :

$$z=\frac{W^2R^2}{2g};\quad 1=\frac{W^2(0.70)^2}{0.49}$$

De donde :

$$W^2=\frac{1\times 19.60}{0.49}$$

En R.P.M. : $W=\dfrac{6.33\times 60}{2\pi}$;

W = 6.33 rad/seg.
W = 60.5 R.P.M.

28.- Una semi-esfera de borde horizontal está llena de líquido. Calcular la cantidad de líquido que desborda cuando la semi-esfera gira alrededor de su eje vertical con la velocidad angular W.

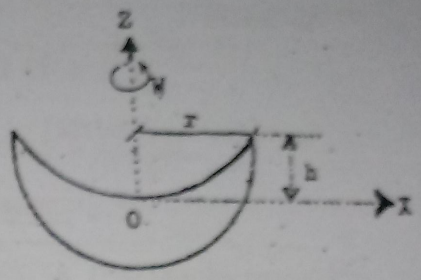
SOLUCION

Para movimientos rotativos se sabe :

$$z=\frac{W^2x^2}{2g}$$

Siendo r el radio de la esfera y h la profundidad al girar en el centro :

$$h = \frac{w^2 x^2}{2g}$$



La superficie es un paraboloide cuyo volumen es :

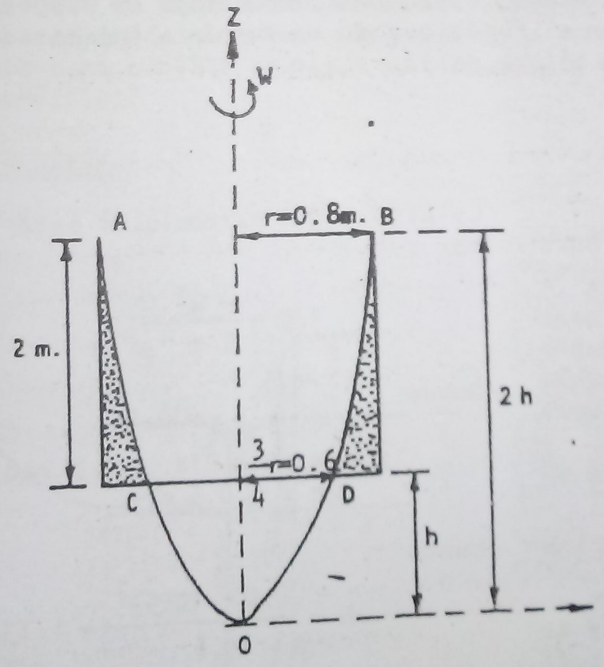
$$\frac{\pi r^2 h}{2}$$

Esta es precisamente la cantidad de líquido que se derrama.

$$\therefore \quad \boxed{V = \frac{\pi r^4 w^2}{4g}}$$

29.- Un vaso cilíndrico está lleno de líquido ¿A qué velocidad deberá girar sobre un eje vertical para que el líquido deje descubierto en el fondo un círculo de radio igual a las 3/4 partes del radio del cilindro? ¿Cuál será el volúmen líquido derramado por la rotación? El vaso cilíndrico tiene 1.6 m. de diámetro y 2 m. de altura.

SOLUCION



La altura z, a la que llega un líquido debido al movimiento rotativo está dado por :

$$z = \frac{w^2 x^2}{2g}$$

$$\therefore \quad w^2 = \frac{2g^2}{x^2}$$

La velocidad para el punto B :

$$w^2 = \frac{2g(2 + h)}{0.8^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

La velocidad para el punto D :

$$w^2 = \frac{2gh}{0.6^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(1) = (2) porque las velocidades angulares son iguales para cualquier punto.

$$\frac{2g(2 + h)}{0.64} = \frac{2gh}{0.36}$$

De donde :

$$h = 2.57 \text{ m.}$$

Sustituyendo en (2)

$$W^2 = \frac{19.6 \times 2.57}{0.36} = 140$$

$$\therefore \boxed{W = 11.8 \text{ rad/seg.}}$$

Como estuvo lleno, el volumen derramado será :

V = Vol. paraboloide (radio 0.8 m.) - Vol. paraboloide (radio 0.6)

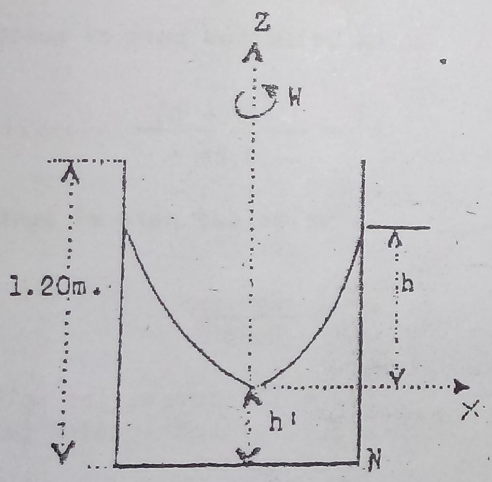
$$V = \frac{\pi\, 0.8^2 (h+2)}{2} - \frac{\pi\, 0.6^2\, h}{2} = \frac{\pi\, 0.64(2+2.57)}{2} - \frac{\pi\, 0.36 \times 2.57}{2}$$

$$V = \frac{\pi\,(0.64 \times 4.57 - 0.36 \times 2.57}{2} = \frac{\pi\,(1,9966)}{2}$$

$$\boxed{V = 3.135 \text{ m}^3}$$

30.- Una vasija cilíndrica contiene agua hasta una profundidad de 0.60 m. Determinar la presión máxima en el fondo cuando es rotada alrededor de su eje, a razón de 90 R.P.M. La altura de la vasija es 1.20 m. y su diámetro es 1.00 m.

SOLUCION



La altura del paraboloide está dado por :

$$z = \frac{W^2 x^2}{2g}$$

Donde :

$$W = 90 \text{ R.P.M.} = 3\pi \text{ rad/seg.}$$
$$x = r = 0.5 \text{ m.}$$

Luego :

$$h = \frac{(3\pi)^2 (0.5)^2}{19.6} = 1.133 \text{ m.}$$

Cálculo de la altura h' que hay del fondo al vértice del paraboloide :
Vol. ABCD = VOL. Agua + Vol. paraboloide.

Es decir :

$$\pi r^2 (1 + h') = \pi r^2 \, 0.60 + \frac{\pi r^2 h}{2}$$

$$1.133 + h' = 0.60 + \frac{1.133}{2}$$

De donde : $h' = 0.034$ m.

Luego la máxima y mínima presión sobre el fondo se realizarán respectivamente donde hay más y menos altura de agua, es decir ;

Presión máxima en los bordes : $p = w(h + h') = 1{,}000 \; (1.133 + 0.034)$

$$p = 1.167 \text{ kg/m}^2$$

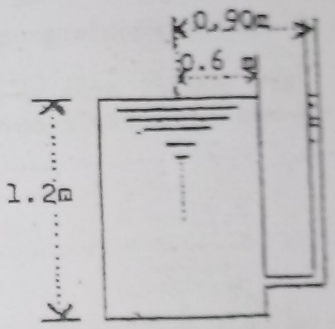
$$\boxed{P_{máx} = 0.1167 \text{ kg/cm}^2 \text{ relativos}}$$

Presión mínima al centro : $p = wh' = 1{,}000 \times 0.034$

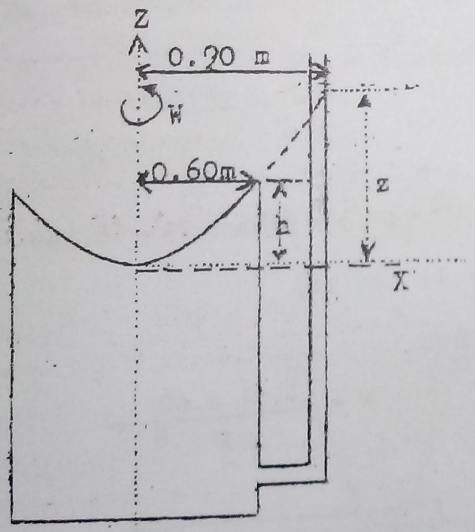
$$p = 34 \text{ kg/m}^2$$

$$\boxed{P_{mín} = 0.0034 \text{ kg/cm}^2 \text{ relativos}}$$

31.- El cilindro vertical abierto, mostrado en la figura adjunta, gira alrededor de su eje, a 56 R.P.M. Si fue previamente llenado de agua hasta el borde superior. ¿Hasta qué altura por encima de este borde se elevará el agua en el tubo piezométrico?



SOLUCION



Al girar, la superficie del líquido adquiere la forma parabólica, e incluso se prolonga hasta en el tubo piezométrico, tal como se ve en la figura de la izquierda.

La velocidad angular es :

$$W = 56 \text{ R.P.M.} = \frac{56 \times 2\pi}{60} = 5.86 \text{ rad/seg}$$

La ecuación de la superficie parabólica está dado por :

$$z = \frac{W^2 x^2}{2g}$$

La altura de la parabóla en el recipiente es :

$$h = \frac{(5.86)^2(0.6)^2}{19.6} = \frac{34.34 \times 0.36}{19.6} = 0.63 \text{ m.}$$

La altura, a partir del eje X en el piezómetro es:

$$z = \frac{(5.86)^2(0.9)^2}{19.6} = \frac{34.34 \times 0.81}{19.6} = 1.42 \text{ m.}$$

La altura que se elevará el agua en el piezómetro por encima del borde, es :

$$\Delta h = z - h = 1.42 - 0.63$$

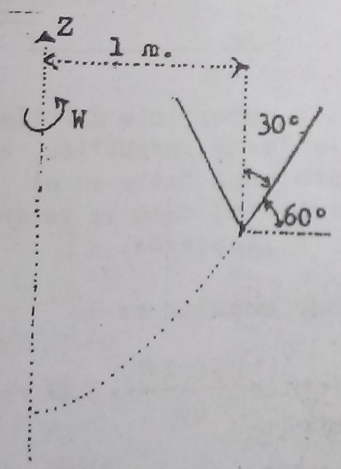
$$\boxed{\Delta h = 0.79 \text{ m.}}$$

32.- Un depósito cónico de eje vertical y generatriz inclinada 30° con respecto a su eje, gira de un eje vertical, distante 1 metro del eje del cono. ¿A cuántas R.P.M. se tendrá que hacer girar el depósito para expulsar toda el agua contenida en él?

SOLUCION

Al girar adquiere una superficie parabólica dada por : $z = \frac{W^2 x^2}{2g}$

Para que el agua se derrame completamente, esta curva debe ser tangente a una generatriz en el vértice del cono.



Luego la derivada de la curva parabólica será la pendiente de dicha generatriz :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2W^2 x}{2g} = \operatorname{tg} 60° \sqrt{3}$$

De donde :

$$W^2 = \frac{g\sqrt{3}}{x}$$

Como x = 1 m.

$$W^2 = g\sqrt{3} = 9.8 \times 1.73 = 16.954$$

W = 4.11 rad/seg.

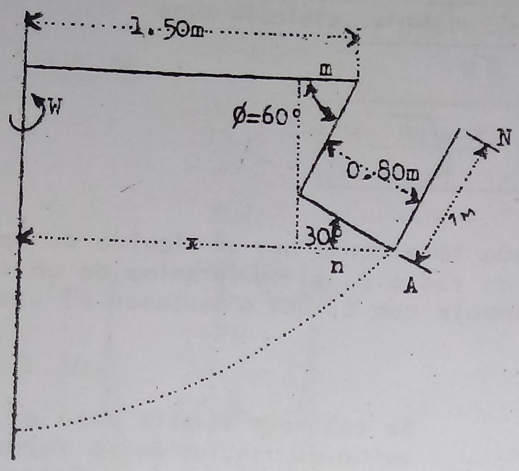
En R.P.M. :

$$W = \frac{4.11 \times 60}{2\pi}$$

$$\boxed{W = 39.3 \text{ R.P.M.}}$$

33.- Un recipiente lleno de un líquido cuelga de un brazo horizontal de 1.50 metros cuyo extremo está unido a un eje vertical. Calcular el número de R.P.M. con el cual se conseguirá vaciar completamente el recipiente - siendo el ángulo Ø para esta condición de 60°.

SOLUCION



Al girar, la superficie libre - será una sección parabólica cuya ecuación es :

$$z = \frac{W^2 x^2}{2g}$$

Para que se vacíe el depósito, - la pared del recipiente debe ser tangente a la parábola en el punto A.
Derivando la ecuación de la parábola :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{W^2 x}{g} = tg\ \emptyset = tg\ 60° = \sqrt{3}$$

De donde : $W = \frac{g\sqrt{3}}{x}$

Pero en el punto A : $x = 1.5 - m + n$

$$x = 1.50 - 1\cos 60° + 0.80 \cos 30° = 1.50 - 0.5 + 0.80 \times 0.866$$

$$x = 1.695 \text{ m.}$$

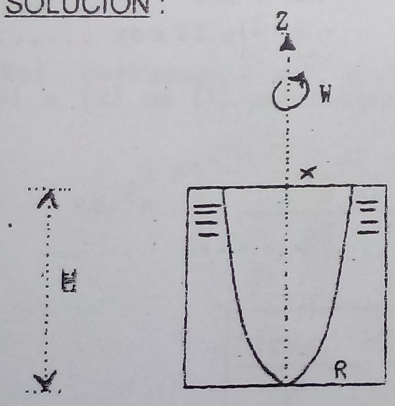
Luego : $W = \sqrt{\frac{9.8\sqrt{3}}{1.695}} = 3.16$ rad/seg.

En R.P.M. : $W = \frac{3.16 \times 60}{2\pi}$

$$W = 30.18 \text{ R.P.M.}$$

34.- Un cilindro cerrado de altura H tiene las tres cuartas partes de su volumen ocupados por líquido. ¿Con qué velocidad ha de girar el cilindro alrededor de su eje para que el paraboloide que se forme sea tangente a la base?

SOLUCIÓN :



La ecuación del paraboloide es :

$$z = \frac{W^2 x^2}{2g} \qquad H = \frac{W^2 x^2}{2g} \quad \ldots\ldots (1)$$

Además los volúmenes sin agua inicial y final son iguales :

$$\pi R^2 (H - \frac{3}{4} H) = \frac{\pi x^2}{2} H$$

De donde :

$$\frac{R^2}{4} = \frac{x^2}{2} \qquad x^2 = \frac{R^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

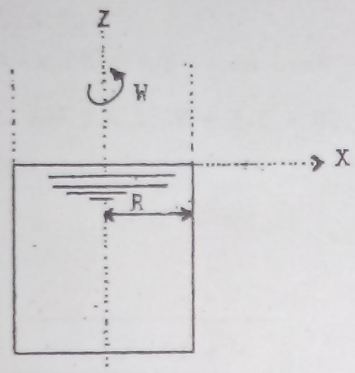
Reemplazando (2) en (1)

$$H = \frac{W^2 \left(\frac{R^2}{2}\right)}{2g}$$

De aquí es despejada : $\boxed{W = \frac{2\sqrt{gH}}{R}}$

35.- Se tiene un vaso cerrado ocupado totalmente por un líquido de peso específico w. El depósito tiene un radio R, si se le anima de un movimiento rotativo W. ¿Cuál será el empuje que tiende a destapar el vaso?

SOLUCION



Se sabe que en este caso el paraboloide de revolución se forma en la parte exterior del depósito y tangente.

La presión a una distancia x, sobre la tapa será :

$$p = wz$$

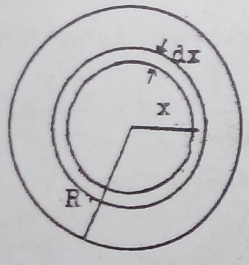
Pero como : $z = \frac{W^2 x^2}{2g}$

Se tiene que la presión unitaria es:

$$p = \frac{wW^2x^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Se sabe que : F = p.A ; tomando un anillo oncéntrico diferencial sobre la tapa :

$$dF = p.dA$$
$$dF = p.2\pi x\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$



Reemplazando (1) en (2) e integrando :

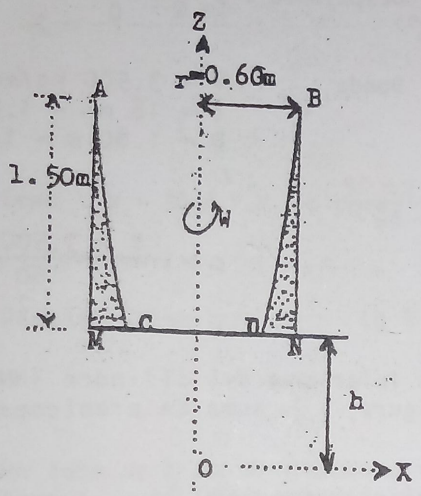
$$F = \frac{w\,W^2\,2\pi}{2g} \int_0^R x^3.dx$$

$$\boxed{F = \frac{wW^2R^4}{4g}}$$

36.- Un tanque cilíndrico de 1.20 m. de diámetro y 1.50 m. de altura, está lleno de agua, y es hecho girar alrededor de su propio eje, que permanece vertical, con una velocidad angular de 180 R.P.M.

a) Determinar el diámetro del área circular descubierto en el fondo y el volumen del líquido derramado.
b) Si el mismo tanque lleno de agua, es cerrado en su parte superior ¿cuál será la máxima presión que se desarrollará en m. de agua absoluta, y dónde se presentará?

SOLUCION



Se sabe que : $z = \frac{W^2 x^2}{2g}$

Para el paraboloide AOB :

$W = \frac{180 \times 2\pi}{60} = 6$ rad/seg.

$x = r = 0.6$ m.

$z = 1.50 + h$

Luego : $1.50 + h = \frac{(6\pi)^2 (0.6)^2}{19.6}$

$1.50 + h = 6.50$

$h = 5$ m.

Para el paraboloide COD :

$W = 6$ rad/seg; $x = R$; $z = h = 5$m.

Luego :

$$5 = \frac{(6\pi)^2 R^2}{19.60}$$

De donde : $R = 1/6\pi \sqrt{5 \times 19.6} = 0.525$ m.

El diámetro será : $D = 2R$ $\boxed{D = 1.05 \text{ m.}}$

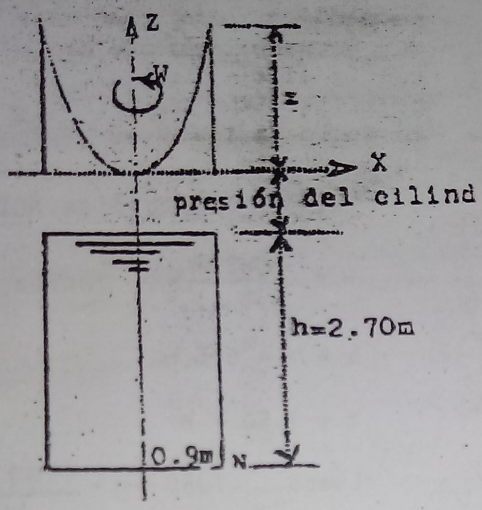
Vol. derramado = Vol. parábola. AOB - Vol. parabola COD.

$$V = \frac{\pi 0.6^2 (1.50 + h)}{2} - \frac{\pi 0.525^2 h}{2} = \frac{\pi}{2}(0.36 \times 6.50 - 0.2756 \times 5)$$

$$\boxed{V = 1.508 \text{ m}^3}$$

37.- Un cilindro de 1.80 m. de diámetro y 2.70 m. de altura, es llenado de glicerina, cuyo peso específico es 1,600 kg/m3, a una presión de 4,568 kg/cm2. ¿A qué velocidad de rotación deberá girar alrededor de su eje para que se produzca la ruptura del cilincro?. El espesor de las paredes del tanque es 18 mm., de un acero que resiste 3,500 kg/cm2 a la ruptura.

SOUCIÓN



Se calculará primero la mínima presión para su ruptura :

Se sabe : $\sigma = \frac{pD}{2t}$

Despejando : $p = \frac{2\sigma t}{D}$

Donde : $\sigma = 3{,}500\ kg/cm^2$
$t = 18\ mm = 1.8\ cm.$
$D = 1.80\ m = 180\ cm.$

Luego :

$$p = \frac{2 \times 3{,}500 \times 1.8}{180}$$

$$p = 70\ kg/cm^2$$

Esta presión sucederá en los bordes inferiores del cilindro (MN) y debe ser igual, como se aprecia en la figura, a la suma de presiones sobre ella, es decir :

$$p = wh + \text{presión del cilindro} + wz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Como :

$$w = 1{,}600\ kg/m^3 = 0.0016\ kg/cm^3$$
$$h = 2.70 = 270\ cm.$$
$$z = \frac{w^2x^2}{2g} = \frac{W^2(0.90)^2}{19.6} = 0.0413\,W^2\ m. = 4.13\,W^2\ cm.$$

$$\text{presión del cilindro} = 4.568\ kg/cm^2$$

Se tiene reemplazando en (1) :

$$70 = 0.0016 \times 270 + 4.568 + 0.0016 \times 4.13\,W^2$$
$$70 = 0.432 + 4.568 + 0.0066\,W^2$$

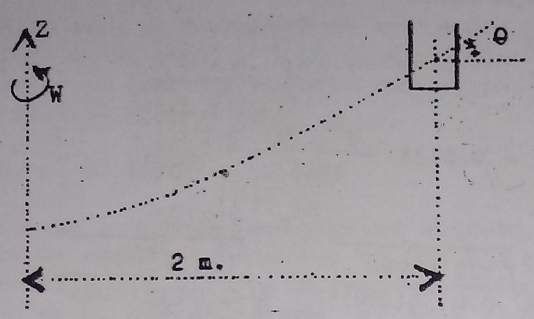
De donde : $W^2 = \frac{65}{0.0066} = 9848$ $\qquad W = 99.25$ rad/seg.

En R.P.M. : $W = \frac{99.25 \times 60}{2\pi}$

$$\boxed{W = 948\ R.P.M.}$$

38.- Determínese la pendiente de la superficie libre del agua en un recipiente muy pequeño que está colocado en una mesa horizontal giratoria, si la mesa gira a 30 R.P.M. alrededor de un eje vertical situado a 2.00 m. de distancia del centro del recipiente.

SOLUCION



Al girar la superficie libre del recipiente será una superficie parabólica, pero, como este, es muy pequeño comparado con la distancia al eje vertical, podemos asimilar dicha superficie como un punto de la curva.
Su pendiente será una tangente a la curva en ese punto :

$$z = \frac{W^2x^2}{2g}$$

$$\frac{dz}{dx} = tg\,\theta = \frac{2W^2x}{2g} = \frac{W^2x}{g}$$

Como : $W = 30$ R.P.M. $= \frac{30 \times 2\pi}{60} = \pi$ rad/seg.

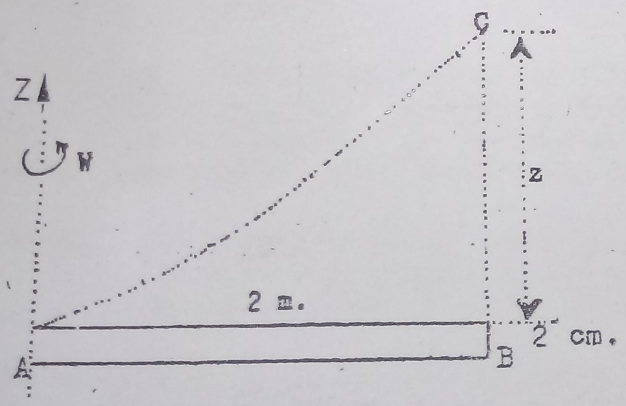
$x = 2$ m.

Se tiene reemplazando : $tg\,\theta = \frac{2\pi^2}{9.8}$

$$\boxed{tg\,\theta = 2.014}$$

39.- Un tubo de 2 cm. de diámetro y de 2 m. de longitud, cerrado en ambos extremos, está lleno de mercurio (d.r = 13.6) a la presión atmosférica. El espesor de las paredes del tubo es de 0.001 m. Se quiere determinar la máxima velocidad de rotación en R.P.M., que puede darse al tubo sobre un plano horizontal y alrededor de un eje que pase por uno de sus extremos, para que no se rompan las paredes del tuno por efecto de la presión interna desarrollada. La carga de trabajo a la tensión del acero puede tomarse como 1,200 kg/cm2.

SOLUCIÓN :



Según sabemos la presión máxima que resiste la tubería es :

$$p = \frac{2\sigma t}{D}$$

Donde : $\sigma = 1{,}200$ kg/cm^2
$t = 0.001$ m $= 0.1$ cm.
$D = 2$ cm.

Luego : $p = \frac{2 \times 1{,}200 \times 0.1}{2} = 120$ kg/cm^2

Ésta máxima presión debe ser igual a la presión producida por la carga BC = z, es decir : en el extremo B.

Se puede escribir : $p = wz$ (se desprecia la altura del diámetro por ser relativamente pequeño).

Donde :

$$p = 120 \text{ kg/cm}^2$$

$$w = 13{,}600 \text{ kg/m}^3 = 0.0136 \text{ kg/cm}^2$$

$$z = \frac{W^2 x^2}{2g} = \frac{W\,(200)^2}{1960}$$

Luego reemplazando : $$120 = 0.0136\ \frac{W^2 (200)^2}{1960}$$

Despejando la incógnita :

$$W = \sqrt{\frac{120 \times 1960}{0.0136(200)^2}} = \sqrt{\frac{12 \times 19600}{0.0136(200)^2}}$$

$$W = \frac{140}{200}\sqrt{\frac{12}{0.0136}} = \frac{7}{10}\sqrt{883} = 20.79 \text{ rad/seg.}$$

En R.P.M.

$$W = \frac{20.79 \times 60}{2\pi}$$

$$\boxed{W = 198.5 \text{ R.P.M.}}$$